14/5/2018

ΑΝΑΠΛΗΡΩΣΗ : ΠΑΡΑΣΚΕΥΗ 25/5 15.00-19.00

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

ΟΡΙΣΜΟΣ: Μηδενικός δακτύλιος είναι ο δακτύλιος με ένα στοιχείο $\{0_R\}$ και πράξεις $0_R+0_R=0_R$, $0_R\cdot 0_R=0_R$

ΥΠΕΝΘΥΜΙΣΗ Αν R_1, R_2 δακτύλιοι $\phi: R_1\to R_2$ συνάρτηση, η ϕ λέγεται ομομορφισμός δακτυλίων αν

$\phi(a+b)=\phi(a)+\phi(b)$

$\phi(a\cdot b)=\phi(a)\cdot\phi(b)$ για κάθε $a,b\in R_1$.

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ Αν $\phi: R_1\to R_2$ ομομ. δακτυλίων τότε φανερά $\phi:(R_1,+)\to(R_2,+)$ ομομ. ομάδων. Άρα, $\phi(0_{R_1})=0_{R_2}$

$\phi(-a)=-\phi(a)$ για κάθε $a\in R_1$.

ΠΡΟΣΟΧΗ Μπορεί R_1,R_2 δακτύλιοι με μονάδα $\phi: R_1\to R_2$ ομομ. δακτυλίων και $\phi(1_{R_1})\neq 1_{R_2}$

(π.χ. $\phi:\mathbb{Z}\to\mathbb{Z}$, $\phi(k)=0$ για κάθε $k\in\mathbb{Z}$)

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 1. Αν R_1,R_2 δακτύλιος $\phi: R_1\to R_2$ $\phi(a)=0_{R_2}$ για κάθε $a\in R_1$ είναι ομομορφισμός δακτυλίων.

2. Αν R δακτύλιος, $\phi: id: R\to R_1$, $\phi(a)=a$ είναι ομομ. δακτυλίων.

3. Έστω $\phi:(\mathbb{C},+,\cdot)\to(\mathbb{C},+,\circ)$ $\phi(z)=\bar{z}$, δηλ. αν $a,b\in\mathbb{R}$ $\phi(a+bi)=a-bi$

ΙΣΧΥΡΙΣΜΟΣ ϕ ομομορφισμός δακτυλίων

ΑΠΟΔΕΙΞΗ Έστω $z_1,z_2\in\mathbb{C}$. Ξέρουμε ότι $\overline{z_1+z_2}=\overline{z_1}+\overline{z_2}$ και $\overline{z_1\cdot z_2}=\overline{z_1}\cdot\overline{z_2}$.

Επομένως, $\phi(z_1+z_2)=\overline{(z_1+z_2)}=\overline{z_1}+\overline{z_2}=\phi(z_1)+\phi(z_2)$

$\phi(z_1\cdot z_2)=\overline{(z_1\cdot z_2)}=\overline{z_1}\cdot\overline{z_2}=\phi(z_1)\cdot\phi(z_2)$

ΟΡΙΣΜΟΣ: Ένας ομομ. δακτυλίων $\phi: R_1\to R_2$ λέγεται

α) Μονομορφισμός δακτυλίων αν ϕ 1-1.

b) Επιμορφισμός δακτυλίων αν ϕ ΕΠΙ.
c) Ισομορφισμός δακτυλίων αν ϕ 1-1, ΕΠΙ.

<u>Παράδειγμα</u> Ο $\phi: (\mathbb{C},+,\cdot) \to (\mathbb{C},+,\cdot)$ $\phi(z)=\bar{z}$ για $z\in\mathbb{C}$ είναι ισομορφισμός δακτυλίων γιατί
a) Δείξαμε ϕ ομομ. δακτυλίων
b) Έστω $a,b\in\mathbb{R}$ και $\phi(a+bi)=0 \Rightarrow a-bi=0+0i$
$\Rightarrow a=b=0$ άρα ϕ 1-1.
c) ϕ ΕΠΙ. Έστω $a,b\in\mathbb{R}$. Τότε $\phi(a-bi)=a+bi$
Συνεπώς, ϕ ΕΠΙ.

<u>ΟΡΙΣΜΟΣ</u> Έστω R δακτύλιος και $I\subseteq R$. Το I λέγεται ιδεώδες (ή αμφίπλευρο ιδεώδες) αν
1) $(I,+)$ υποομάδα του $(R,+)$
2) Αν $a\in I$, $r\in R$ τότε $ra\in I$ ΚΑΙ $ar\in I$

<u>ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ</u> Αφού $(I,+)$ υποομάδα του $(R,+)$ $\Rightarrow$
$I\neq\emptyset$ και $0_R\in I$

<u>ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ</u> Έστω $R=(\mathbb{Z},+,\cdot)$, $n\in\mathbb{Z}$ και $n\mathbb{Z}=\{na \mid a\in\mathbb{Z}\}$ το σύνολο των πολλαπλασίων του n.

ΙΣΧΥΡΙΣΜΟΣ $n\mathbb{Z}$ ΙΔΕΩΔΕΣ ΤΟΥ R

<u>ΑΠΟΔΕΙΞΗ</u> a) Ξέραμε ότι $n\mathbb{Z}=\langle n\rangle$ υποομάδα του $\mathbb{Z}$
b) Έστω $r\in\mathbb{Z}$ και $a\in n\mathbb{Z}$. Θα δείξουμε $ra\in n\mathbb{Z}$ και $ar\in n\mathbb{Z}$
Αφού $\mathbb{Z}$ μεταθετικός δακτύλιος $ra=ar$. Άρα αρκεί να δείξουμε ότι $ra\in n\mathbb{Z}$. Αφού $a\in n\mathbb{Z}$ υπάρχει $k\in\mathbb{Z}$ με $a=nk$. Τότε $ra=r(nk)=(rk)\cdot n\in n\mathbb{Z}$

Συνεπώς, $ra\in n\mathbb{Z}$. Άρα $n\mathbb{Z}$ ιδεώδες του $R=\mathbb{Z}$

<u>ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ</u> Έστω I ιδεώδες του $\mathbb{Z}$. Τότε $(I,+)$ υποομάδα της $(\mathbb{Z},+)$. Αλλά $(\mathbb{Z},+)$ άπειρη κυκλική.

Επομένως από Πρόταση που δίνει όλες τις υποομάδες μιας άπειρης κυκλικής υπάρχει $n \geq 0$ και $I = n\mathbb{Z}$

ΙΣΧΥΡΙΣΜΟΣ Έστω $\Phi : \{n \in \mathbb{Z} : n \geq 0\} \to$ Σύνολο ιδεωδών του $\mathbb{Z}$ με $\Phi(n) = n\mathbb{Z}$.

Τότε η Φ είναι 1-1 και επί

ΑΠΟΔΕΙΞΗ Είδαμε $\Phi(n)$ ιδεώδες του $\mathbb{Z}$ και Φ επί

Αν $n_1, n_2 \geq 0$ με $\Phi(n_1) = \Phi(n_2)$ έχουμε n_1 πολλαπλάσιο του n_2 και n_2 πολλαπλάσιο του n_1 $\xRightarrow[n_1 \geq 0, n_2 \geq 0]{\text{αφού}}$ $n_1 = n_2$

Άρα Φ 1-1. Άρα ο Ισχυρισμός μας δίνει όλα τα ιδεώδη του $\mathbb{Z}$.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ Έστω $R = (\mathbb{R}^{2\times 2}, +, \cdot)$ και

$I = \left\{ \begin{pmatrix} a & 0 \\ b & 0 \end{pmatrix}, a, b \in \mathbb{R} \right\}$ Είναι το I ιδεώδες του R;

ΙΣΧΥΡΙΣΜΟΣ 1) $(I,+)$ υποομάδα του $(R,+)$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ Άμεση $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \in I$ αν $a, b \in \mathbb{R}$

$$\begin{bmatrix} a & 0 \\ b & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} a' & 0 \\ b' & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a-a' & 0 \\ b-b' & 0 \end{bmatrix} \in I$$

ΙΣΧΥΡΙΣΜΟΣ 2 Έστω $\begin{bmatrix} x & y \\ z & w \end{bmatrix} \in R$ και $\begin{bmatrix} a & 0 \\ b & 0 \end{bmatrix} \in I$

Τότε $\begin{bmatrix} x & y \\ z & w \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & 0 \\ b & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} xa+yb & 0 \\ za+wa & 0 \end{bmatrix} \in I$

Αλλά I όχι ιδεώδες του R!!!

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x & y \\ z & w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x & y \\ x & y \end{bmatrix} \notin I \quad \text{αν } y \neq 0$$

ΟΡΙΣΜΟΣ Έστω $\phi : R_1 \to R_2$ ομομ. δακτυλίων

Θέτουμε $\ker\phi = \{a \in R_1 \mid \phi(a) = 0_{R_2}\}$

ΠΡΟΤΑΣΗ Έστω $\phi : R_1 \to R_2$ ομομ. δακτυλίων Τ.Α.Ε.Ι.

i) $\ker\phi = \{0_{R_1}\}$
ii) ϕ 1-1

<u>ΑΠΟΔΕΙΞΗ</u> Ίδια με την περίπτωση ομομορφ. ομάδων

<u>ΠΡΟΣΟΧΗ</u> Έστω R_1, R_2 δακτύλιοι $\phi: R_1 \to R_2$ συνάρτηση ώστε $\phi(a+b) = \phi(a) + \phi(b)$ για κάθε $a, b \in R_1$, δηλ. $\phi: (R_1, +) \to (R_2, +)$ ομομ. ομάδων. Για να είναι η ϕ ομομ. δακτυλίων πρέπει επιπλέον $\phi(a \cdot b) = \phi(a) \cdot \phi(b)$ για κάθε $a, b \in R_1$ το οποίο μπορεί να ισχύει ή μπορεί να μην ισχύει

<u>ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ</u> $\phi: (\mathbb{Z}, +, \cdot) \to (2\mathbb{Z}, +, \cdot)$, $\phi(a) = 2a$

Τότε $\phi(a+b) = \phi(a) + \phi(b)$ για κάθε $a, b \in \mathbb{Z}$, αλλά $\phi(1 \cdot 1) = \phi(1) = 2$. Ενώ $\phi(1) \cdot \phi(1) = 2 \cdot 2 = 4 \neq \phi(1 \cdot 1)$

Άρα ϕ ΟΧΙ ομομορφισμός ομάδων.

<u>ΟΡΙΣΜΟΣ</u> Έστω $(R_1, +_1, \cdot_1), \ldots, (R_n, +_2, \cdot_2)$ δακτύλιοι

Τότε (εύκολα βλέπουμε) ότι το καρτεσιανό γινόμενο $R = R_1 \times R_2 \times \ldots \times R_n$ εφοδιασμένο με τις επαγόμενες πράξεις $(a_1, a_2, \ldots, a_n) + (b_1, b_2, \ldots, b_n) = (a_1 +_1 b_1, a_2 +_2 b_2, \ldots, a_n +_n b_n)$ και $(a_1, a_2, \ldots, a_n) \cdot (b_1, b_2, \ldots, b_n) = (a_1 \cdot_1 b_1, a_2 \cdot_2 b_2, \ldots, a_n \cdot_n b_n)$ αποτελεί δακτύλιο που ονομάζεται ΕΥΘΥ ΓΙΝΟΜΕΝΟ των $R_1, R_2, \ldots, R_n$

<u>ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ</u> Αν R_i πεπερασμένος δακτύλιος τότε το $R_1 \times \ldots \times R_n$ είναι πεπερασμένος δακτύλιος και $|R_1 \times \ldots \times R_n| = |R_1| \cdot |R_2| \ldots |R_n|$

π.χ. Το $\mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_5$ έχει $3 \cdot 5 = 15$ στοιχεία

<u>ΟΡΙΣΜΟΣ</u> Έστω $(R, +, \cdot)$ δακτύλιος με μονάδα 1_R και $a \in R$. Το a λέγεται <u>αντιστρέψιμο</u> αν υπάρχει $b \in R$ με $ab = 1_R$ και $ba = 1_R$

<u>ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 1</u> Έστω $R = (\mathbb{Z}, +, \cdot)$ και $a \in \mathbb{Z}$. Πότε είναι το a <u>αντιστρέψιμο</u> στο R; Δηλαδή πότε υπάρχει $b \in \mathbb{Z}$ με $ab = ba = 1$;

ΑΠΑΝΤΗΣΗ: Αν και μόνο αν $\alpha = 1$ ή -1

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 2 Έστω $R = (\mathbb{Q}, +, \cdot)$ και $\alpha \in \mathbb{Q}$. Τότε α αντιστρέψιμο αν και μόνο αν $\alpha \neq 0$. Το ίδιο αν $R = (\mathbb{R}, +, \cdot)$ ή $R = (\mathbb{C}, +, \cdot)$

ΠΡΟΤΑΣΗ Έστω R δακτύλιος με μονάδα 1_R. Θέτουμε
$U(R) = \{\alpha \in R : \alpha \text{ αντιστρέψιμος}\}$
Τότε $(U(R), \cdot)$ ΟΜΑΔΑ.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ Αφού $1_R \cdot 1_R = 1_R$ έχουμε $1_R \in U(R)$
Έστω $\alpha, b \in U(R)$. Τότε υπάρχουν $\alpha', b' \in R$ με $\alpha \cdot \alpha' = \alpha' \alpha = 1_R$ και $b \cdot b' = b' \cdot b = 1_R$. Άρα $(\alpha \cdot b) \cdot (b' \cdot \alpha') = \alpha (b \cdot b') \cdot \alpha' = \alpha \cdot \alpha' = 1_R$ και $(b' \cdot \alpha') \cdot (\alpha b) = b' (\alpha' \alpha) b = b' \cdot 1_R \cdot b = b' \cdot b = 1_R$
Συνεπώς $\alpha, b \in U(R) \Rightarrow \alpha \cdot b \in U(R)$
Έστω $\alpha \in U(R)$. Τότε υπάρχει $\alpha' \in R$ με $\alpha \cdot \alpha' = \alpha' \alpha = 1_R$
Αφού ο πολλαπλασιασμός σε δακτύλιο είναι προσεταιριστικός από τα παραπάνω έχουμε $(U(R), \cdot)$ ΟΜΑΔΑ

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 1 $U(\mathbb{Z}) = \{1, -1\}$ $U(\mathbb{Q}) = \mathbb{Q} \setminus \{0\}$
$U(\mathbb{R}) = \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $U(\mathbb{C}) = \mathbb{C} \setminus \{0\}$

Έστω $n \geq 2$ $U(\mathbb{R}^{n \times n}) =$ αντιστρέψιμοι $n \times n$ πίνακες $= GL(n\mathbb{R}) = GL_n(\mathbb{R})$

$\{A \in \mathbb{R}^{n \times n} \mid \det A \neq 0\}$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ Έστω $n \geq 2$ και $R = (\mathbb{Z}_n, +, \cdot)$ όπου
$\mathbb{Z}_n = \{[0]_n, [1]_n, \ldots, [n-1]_n\}$ ο δακτ. των ακεραίων modulo n. Έχουμε δει για $\alpha \in \mathbb{Z}$ $[\alpha]_n$ αντιστρ. στο $\mathbb{Z}_n \Leftrightarrow \text{ΜΚΔ}(\alpha, n) = 1$. Συνεπώς $U(\mathbb{Z}_n) = \{[\alpha]_n : \text{ΜΚΔ}(\alpha, n) = 1$ και $1 \leq \alpha < n\}$
π.χ. $U(\mathbb{Z}_6) = \{[1]_6, \ldots, [5]_6\}$ Γενικά έχουμε δει

$|U(\mathbb{Z}_n)| = \varphi(n)$, όπου φ η συνάρτηση φ του Euler

ΠΡΟΣΟΧΗ Αν ο R δεν έχει μονάδα, <u>δεν</u> έχει νόημα να αναφερόμαστε σε αντιστρέψιμα στοιχεία.

ΟΡΙΣΜΟΣ Έστω $(R,+,\cdot)$ δακτύλιος. Ο R λέγεται ΔΙΑΙΡΕΤΙΚΟΣ Δακτύλιος αν ο R έχει μονάδα 1_R, ισχύει $1_R \neq 0_R$ και κάθε στοιχείο του $R\setminus\{0_R\}$ είναι αντιστρέψιμο.

Ένας μεταθετικός διαιρ. δακτ. λέγεται ΣΩΜΑ.
" μη " " " " ΣΤΡΕΒΛΟ ΣΩΜΑ.

Παραδείγματα σωμάτων $(\mathbb{Q},+,\cdot)$, $(\mathbb{R},+,\cdot)$, $(\mathbb{C},+,\cdot)$ και $(\mathbb{Z}_p,+,\cdot)$ όπου p πρώτος.

Το $(\mathbb{Z},+,\cdot)$ ΔΕΝ είναι σώμα, γιατί το 2 <u>δεν</u> αντιστρέφεται στο $\mathbb{Z}$.

ΙΣΧΥΡΙΣΜΟΣ Έστω $n \geq 2$ σύνθετος (δηλ. όχι πρώτος). Τότε το $(\mathbb{Z}_n,+,\cdot)$ ΔΕΝ είναι σώμα.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ Έστω $n = k_1 \cdot k_2$ με $1 < k_1 < n$, $1 < k_2 < n$. Τότε $[k_1]_n \neq 0_{\mathbb{Z}_n} = [0]_n$. Έστω ότι υπάρχει $b \in \mathbb{Z}$ με $[k_1]_n \cdot [b]_n = [1]_n \Rightarrow [k_2]_n([k_1]_n \cdot [b]_n) = [k_2]_n \cdot [1]_n = [k_2]_n$
$\Rightarrow [k_1 \cdot k_2]_n \cdot [b]_n = [k_2]_n \Rightarrow [0]_n \cdot [b]_n = [k_2]_n \Rightarrow$
$[0\cdot b]_n = [k_2]_n \Rightarrow [k_2]_n = [0]_n$ αντίφαση, γιατί $1 < k_2 < n$, άρα $[k_2]_n \neq [0]_n$

ΟΡΙΣΜΟΣ Έστω R δακτύλιος και $a \in R$ με $a \neq 0_R$. Ο a λέγεται διαιρέτης του μηδενός στο R αν υπάρχει $b \in R$, $b \neq 0_R$ με $ab = 0_R$ ή υπάρχει $b \in R$, $b \neq 0_R$ με $ba = 0_R$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ Έστω $R = (\mathbb{R}^{2\times 2},+,\cdot)$ και $a = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$

Ο a είναι διαιρέτης του μηδενός στο R, γιατί

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

<u>ΠΡΟΤΑΣΗ</u> Έστω R δακτύλιος με μονάδα 1_R και $a \neq 0_R$ διαιρέτης του μηδενός στο R. Τότε $a \notin U(R)$, δηλ. a όχι αντιστρέψιμο.

<u>ΑΠΟΔΕΙΞΗ</u> Έστω a αντιστρέψιμο. Άρα υπάρχει $c \in R$ με $ac = ca = 1_R$

<u>ΠΕΡΙΠΤΩΣΗ 1</u> Υπάρχει $b \in R$, $b \neq 0_R$ με $ab = 0_R$. Τότε

$$ab = 0_R \Rightarrow cab = c \cdot 0_R \underset{\text{ΠΡΟΤΑΣΗ}}{=} 0_R \Rightarrow (ca) \cdot b = 0_R \Rightarrow$$

$1_R \cdot b = 0_R \Rightarrow b = 0_R$ αντίφαση

<u>ΠΕΡΙΠΤΩΣΗ 2</u> Υπάρχει $b \in R$, $b \neq 0_R$ με $ba = 0_R$. Τότε

$$ba = 0_R \Rightarrow bac = 0_R \cdot c = 0_R \Rightarrow b(ac) = 0_R \Rightarrow$$

$$b \cdot 1_R = 0_R \Rightarrow b = 0_R$$

Άρα σε κάθε περίπτωση έχουμε αντίφαση

<u>ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ</u> Γενικά, σε κάθε δακτύλιο R με μονάδα και $1_R \neq 0_R$ έχουμε σαν στοιχεία.

1) Το 0_R
2) Τα αντιστρέψιμα (υπάρχει τουλάχιστον ένα το 1_R)
3) Τα $a \neq 0$ που είναι διαιρέτες του μηδενός (αν υπάρχουν)
4) Τα υπόλοιπα στοιχεία (αν υπάρχουν)

<u>Παράδειγμα 1</u> Στο $\mathbb{Z}$ κατηγορία 1 Το 0_R
« 2 $1, -1$
« 3 ΔΕΝ ΥΠΑΡΧΟΥΝ στοιχεία
« 4 Οι ακέραιοι k με $k \notin \{0, 1, -1\}$

<u>Παραδ. 2</u> Έστω $\mathbb{F}$ σώμα π.χ. $\mathbb{F} = \mathbb{Q}$ ή $\mathbb{F} = \mathbb{R}$ ή $\mathbb{F} = \mathbb{C}$ ή $\mathbb{F} = \mathbb{Z}_p$, p πρώτος

Κατηγορία 1 Το $0_{\mathbb{F}}$
« 2 Το $\mathbb{F} \setminus \{0_{\mathbb{F}}\}$
« 3 Δεν υπάρχουν στοιχεία.
« 4 « « «

Παράδειγμα 3 Έστω $R=(\mathbb{Z}_4,+,\cdot)$ $\mathbb{Z}_4=\{[0]_4,[1]_4,[2]_4,[3]_4\}$

Κατηγορία 1 : Το $[0]_4$

« 2 : Τα $[1]_4, [3]_4$

« 3 : Το $[2]_4$, γιατί $[2]_4 \cdot [2]_4 = [0]_4$

« 4 : Δεν υπάρχουν στοιχεία.

Παράδειγμα 4 Έστω $n \geq 2$ και $R=(\mathbb{R}^{n\times n},+,\cdot)$

Κατηγορία 1 : Ο μηδενικός πίνακας

« 2 : Οι αντιστρέψιμοι πίνακες

« 3 : Από Γρ. Αλγ. αν $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ μη αντιστρέψιμος, τότε υπάρχει $B \in \mathbb{R}^{n\times n}$ μη μηδενικός με $AB=$ μηδενικός

Άρα η κατηγορία 3 είναι $\{A \in \mathbb{R}^{n\times n} \mid A$ όχι μηδενικός και $\det A = 0\}$

Κατηγορία 4 Δεν υπάρχουν στοιχεία.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ ύπαρξης B : Αφού A όχι αντιστρέψιμος $\Rightarrow \det A = 0_R \Rightarrow$ το ομογενές σύστημα γραμ. εξισώσεων $A\begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = 0$ έχει και μη μηδενικές λύσεις.

Έστω $\begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}$ μια τέτοια μη μηδενική λύση

Θέτουμε $B = \begin{bmatrix} b_1 & b_1 & \dots & b_1 \\ \vdots & \vdots & & \\ b_n & b_n & & b_n \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{n\times n}$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ Έστω $R=\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$

Κατηγορία 1 : Το $0_R=(0,0)$

« 2 : $(1,1), (1,-1), (-1,1), (-1,-1)$

« 3 : $\{(a,0) : a \in \mathbb{Z}\setminus\{0\}\} \cup \{(0,b) : b \in \mathbb{Z}\setminus\{0\}\}$

(γιατί $(a,0)\cdot(0,1)=(0,0)$ και $(1,0)\cdot(0,b)=(0,0)$)

Κατηγορία 4 : $\{(a,b) = a,b \in \mathbb{Z}, a \neq 0, b \neq 0$ και $(a \notin \{-1,1\}$ ή $b \notin \{-1,1\})\}$

Με άλλα λόγια Κατηγορία 4 : $\{(a,b) : a \neq 0, b \neq 0$

και $(|a| \geq 2$ ή $|b| \geq 2)\}$

ΟΡΙΣΜΟΣ Έστω R μεταθ. δακτύλιος με μονάδα και $1_R \neq 0_R$. Ο R λέγεται ακέραια περιοχή αν δεν έχει κανένα στοιχείο της Κατηγορίας 2. Δηλαδή αν $a, b \in R$ τότε $a \neq 0_R$ και $b \neq 0_R \Rightarrow ab \neq 0_R$

Παράδειγμα 1 Ο $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$ είναι ακέραια περιοχή για το γινόμενο δύο μη μηδενικών ακεραίων είναι μη μηδενικό

Παράδειγμα 2 Κάθε σώμα είναι ακέραια περιοχή από την Πρόταση ότι διαιρέτες του μηδενός δεν είναι αντιστρέψιμοι. Συνεπώς $(\mathbb{R}, +, \cdot)$, $(\mathbb{Q}, +, \cdot)$ $(\mathbb{C}, +, \cdot)$ $(\mathbb{Z}_p, +, \cdot)$ για p πρώτο είναι ακέραιες περιοχές.

Παράδειγμα 3 Έστω $n \geq 2$ σύνθετος.

ΙΣΧΥΡΙΣΜΟΣ Ο $(\mathbb{Z}_n, +, \cdot)$ ΔΕΝ είναι ακέραια περιοχή.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ Έστω $n = k_1 \cdot k_2$ με $1 < k_1 < n$, $1 < k_2 < n$ Τότε $[k_1]_n \neq [0]_n$, $[k_2]_n \neq [0]_n$, αλλά $[k_1]_n \cdot [k_2]_n = [k_1 \cdot k_2]_n = [n]_n = [0]_n$

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ Ο $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$ είναι Ακέραια περιοχή που δεν είναι σώμα.